¿Cuánto dura un partido de tenis? (Aplicación estocástica)

F. Rendl, Universidad de Klagenfurt, Departamento de Matemáticas

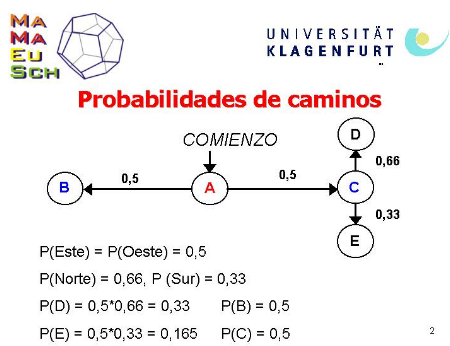
28 de Mayo del 2003

1. Probabilidad elemental

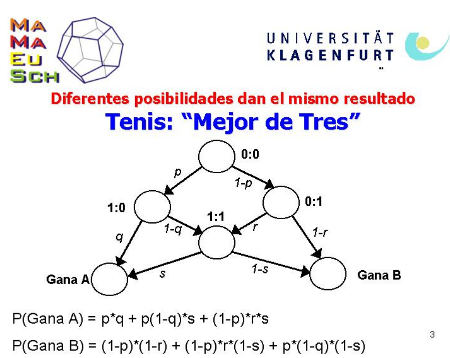
Los procesos aleatorios simples están basados en el siguiente modelo: Dado un conjunto de estados, así como sus probabilidades de llegar de uno a otro.

La probabilidad, partiendo del estado A de llegar al estado B, está determinada por la suma de todas las probabilidades de llegar de A a B. Por lo tanto sumaremos todos los caminos posibles de A a B.

Ejemplo 1.



Ejemplo 2.



En el caso en el que estos estados sean procesos económicos, las siguientes preguntas son particularmente interesantes:

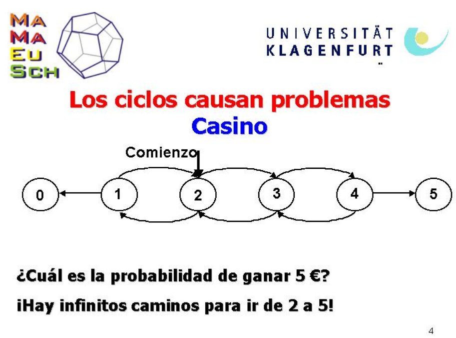
En promedio, ¿cuánto tiempo lleva terminar un curso de producción? ¿Es posible reducir el valor esperado del tiempo de producción, mediante una específica intervención en el proceso?

Estas preguntas son estudiadas para un modelo muy simple, en el transcurso de un partido de tenis y se resuelven con métodos básicos estudiados en secundaria.

2. Los ciclos pueden ser problemáticos

Cuando hay ciclos (dirigidos), la enumeración de todos los caminos dirigidos es muy difícil. El próximo ejemplo ilustra esto: Hay infinitos caminos para ir de 2 a 5, dependiendo de como se atraviesen los ciclos individuales.

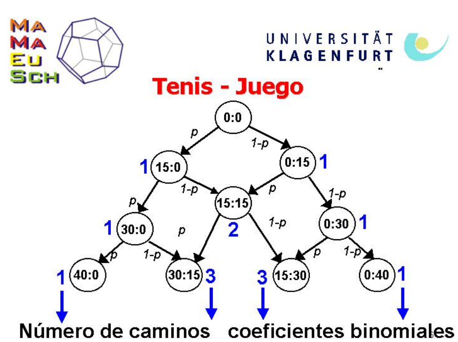
Ejemplo 3.



En términos matemáticos, esto nos conduce a la teoría de procesos estocásticos, el caso más sencillo serían las cadenas de Markov. El análisis requiere nociones del análisis de matrices, que mencionaremos en la bibliografía.

También queremos mostrar cuanto podemos avanzar mediante una aproximación ad-hoc, i.e. para la enumeración de los caminos.

Ejemplo 4.



3. Análisis de un partido de tenis

Un partido de tenis está dividido en sets, que a su vez se dividen en juegos y los juegos se dividen en puntos.

Consideramos un partido como ganado, cuando un jugador consiga al menos 4 tantos con una diferencia de al menos dos tantos con su oponente.

Un posible resultado del juego después de los tres primeros tantos se muestra en el ejemplo 4. El partido completo se ilustra mediante un dibujo en el apéndice.

Un partido finaliza, cuando un jugador ha ganado al menos 6 juegos y la diferencia sea al menos de dos juegos. Para conseguir una victoria partiendo de 5:5 necesitamos ganar 2 juegos seguidos o determinar un set mediante tie-break. El tie-break comienza cuando el resultado es 6:6. Para ganarlo se necesitan 7 puntos una diferencia de al menos 2 puntos con su oponente.

Para ganar un partido de tenis un jugador necesita ganar 2 sets. (En grandes torneos, a veces es necesario ganar 3 sets.)

Supongamos que el jugador A gana un punto con probabilidad p y que esta probabilidad es constante durante todo el partido. La veracidad de esta suposición podría ser discutida en gran detalle. Sin embargo, en este caso, nosotros lo utilizamos simplemente para simplificar el problema.

4. Análisis: Probabilidad de una victoria del jugador A

Queremos estudiar la probabilidad de que el jugador A gane un juego. Además, queremos averiguar cuanto tiempo le llevaría, en promedio, ganar un juego.

$q := 1 - p$.

$G_{A,k}$ es la probabilidad de una victoria (G) del jugador A después de k puntos.

$$G_{A,4} = p^4. \quad \text{(4 puntos seguidos)}$$
$$G_{A,5} = 4p^4q$$
$$G_{A,6} = 10p^4q^2$$

En caso que el juego no haya terminado después de 6 tantos, tiene que haber un marcador de 40:40, ver el dibujo. La probabilidad de que esto ocurra es:

$$r = 20p^3q^3$$

Definimos E_6 como la probabilidad de empate después de 6 tantos:

$$E_6 = 20p^3q^3.$$

En este caso el tiempo restante del partido debería ser el ilustrado en la segunda parte del dibujo. Utilizaremos E para el empate y V para la ventaja de uno u otro jugador. En ese caso es cierto que:

$$G_{A,7} = 0. \quad \text{(ningún juego puede terminar tras 7 tantos).}$$

$$G_{A,8} = rp^2 = 20p^5q^3, \qquad E_8 = 2rpq = 40p^4q^4.$$

$$G_{A,10} = p^2E_8 = 40p^6q^4.$$

En total, A gana con una probabilidad de

$$G_A = G_{A,4} + G_{A,5} + G_{A,6} + G_{A,8} + G_{A,10} + \dots .$$

De este modo $G_{A,8} + G_{A,10} + \dots$ nos conduce a la siguiente serie geométrica:

$$\begin{gathered} 20p^5q^3 + 40p^6q^4 + 80p^7q^5 + \dots = \\ = 20p^5q^3(1 + 2pq + (2pq)^2 + (2pq)^3 + \dots = \\ = 20p^5q^3/(1 - 2pq). \end{gathered}$$

La serie converge porque $2pq \leq 0{,}5$ (La tarea sería encontrar la prueba. Indicación: Aproximación: $p = 0{,}5 + x,\ q = 0{,}5 - x$.)

Por lo tanto, la probabilidad de que gane el jugador A será:

$$G_A = p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2 + \frac{20p^5q^3}{1-2pq} = p^4(1 + 4q + \frac{10q^2}{1-2pq}).$$

5. Análisis de la duración de un juego

Tal y como hicimos antes, podemos analizar también la duración del partido.
D_k es la probabilidad de que acabe un juego tras k puntos. Lógicamente sería $D_1 = D_2 = D_3 = D_7 = D_9 = D_{11} = \dots = 0$.

$$\begin{gathered} D_4 = p^4 + q^4 \\ D_5 = 4(p^4q + pq^4), \\ D_6 = 10(p^4q^2 + p^2q^4). \end{gathered}$$

Los siguientes valores serían:

$$D_8 = 20(p^5q^3 + p^3q^5) = 20p^3q^3(p^2 + q^2)$$

$$D_{10} = 20p^3q^3(p^2 + q^2)(2pq), \dots$$

En caso de utilizar D para el valor esperado de la duración, se cumple que:

$$D = 4D_4 + 5D_5 + 6D_6 + 8D_8 + 10D_{10} + \dots$$

En caso de considerar primero la suma infinita

$$\begin{gathered} 8D_8 + 10D_{10} + 12D_{12} + \dots = \\ 20p^3q^3(p^2 + q^2)\left[8 + 10(2pq) + 12(2pq)^2 + \dots\right] = \\ 40p^3q^3(p^2 + q^2)\left[\sum_{k \geq 1} (2pq)^{k-1}(k + 3)\right] \end{gathered}$$

Aquí la siguiente consideración sería muy útil:

$$\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x},\ \text{si } |x| < 1.$$

Derivando en ambos miembros obtenemos: (aunque necesita su justificación matemática)

$$\sum_{k\geq 1} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Después de sustituir todos los valores y utilizando pequeñas simplificaciones como

$$1 - 2pq = p^2 + q^2$$

obtenemos

$$D = 4p^4(1 + 5q + 15q^2) + 4q^4(1 + 5p + 15p^2) + 40p^3q^3(3 + \frac{1}{1-2pq}).$$

Por lo tanto para $p = 0{,}5$ obtenemos una duración media de 6.75 puntos.

Fuente: P. Bardy: Mathematische Modellbildungen und Computersimulationen als rationale Grundlage für Entscheidungen im Tennissport, *Didaktik der Mathematik 21*, 207-222, 1993.

6. Apéndice